УДК 517.9

Ю. Г. Смирнов, Э. А. Хорошева

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ТМ-ВОЛН В КРУГЛОМ НЕЛИНЕЙНОМ ВОЛНОВОДЕ

Аннотация. Изучается задача о распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненного средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Задача сводится к нелинейной задаче на собственные значения для нелинейной интегральной оператор-функции. Для решения используется метод сжимающих отображений. Представлены численные результаты расчетов.

Ключевые слова: нелинейная среда, распространение электромагнитных волн в волноводе, задача на собственные значения, интегральные уравнения, численный метод.

Abstract. Problem of propagation of TM-polarized electromagnetic waves in nonlinear dielectric waveguide with circular cross-section is considered. Waveguide filled nonlinear media with Kerr law. The problem is reduced to the nonlinear eigenvalue problem for integral operator-function. Contraction type principle is used for solving the problem. Numerical results are presented.

Keywords: nonlinear media, propagation of electromagnetic waves in waveguides, eigenvalue problems, integral equations, numerical methods.

Введение

Задачи распространения электромагнитных волн в различных средах были и остаются актуальными в связи с их широким практическим применением. Необходимость теоретического исследования существования и свойств собственных волн диктуется практической потребностью передачи энергии поля на большие расстояния с минимальными потерями. Успехи в разработке данного направления электродинамики привели к построению различных классов волноведущих структур [1–4].

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода. Пусть все трехмерное пространство R^3 заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_1 = \text{const}$, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, а $\varepsilon_1 \geq 1$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды. В эту среду помещен цилиндрический диэлектрический волновод $W = \{(x, y, z):$ $x^2 + y^2 < R^2\}$ радиуса R однородного заполнения с образующей, параллельной оси Oz, и поперечным круговым сечением.

Будем предполагать гармоническую зависимость полей от времени в виде [1].

Пусть диэлектрическая проницаемость ε внутри волновода определяется по закону Керра:

$$\varepsilon = (\varepsilon_2 + a|\mathbf{E}|^2)\varepsilon_0 ,$$

где a и ε_2 – вещественные положительные константы. Здесь ε_2 – постоянная составляющая проницаемости ε; a – коэффициент нелинейности. Среда предполагается изотропной и немагнитной, $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Требуется отыскать поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода, т.е. собственные волны структуры. Электромагнитное поле собственной волны **E**, **H** удовлетворяет системе уравнений Максвелла [1]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \tag{1}$$

условиям непрерывности касательных составляющих поля $\mathbf{H}_\tau$ и $\mathbf{E}_\tau$ при переходе через границу волновода и условиям экспоненциального затухания поля на бесконечности.

Решение задачи будем искать в форме осесимметричных волн с зависимостью $\exp(i\gamma z)$ от продольной координаты, где γ – вещественная постоянная распространения волны.

Предполагаем, что внутри и вне волновода $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$, где $\tilde{\varepsilon} \ge 1$ – относительная диэлектрическая проницаемость. Обозначим также $k_0{}^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$, где $k_0 > 0$ – волновое число вакуума.

В цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) с учетом ТМ-поляризации уравнения Максвелла можно привести к системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} \gamma^2 e_\rho + i\gamma \dfrac{\partial e_z}{\partial \rho} = k_0^2 \tilde{\varepsilon} e_\rho, \\ i\gamma \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho e_\rho\right) - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial e_z}{\partial \rho}\right) = k_0^2 \tilde{\varepsilon} e_z. \end{cases} \tag{2}$$

При этом h_φ выражается через функции e_ρ и e_z по формуле

$$h_\varphi = \frac{\gamma}{\omega\mu_0} e_\rho - \frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial e_z}{\partial \rho} .$$

Сведение к нелинейной краевой задаче на собственные значения для системы дифференциальных уравнений

Обозначим $e_\rho(\rho;\gamma) = u_1(\rho;\gamma),\ ie_z(\rho;\gamma) = u_2(\rho;\gamma)$.

Будем предполагать, что $u_1(\rho;\gamma), u_2(\rho;\gamma)$ – вещественные функции. Зависимость от γ и (или) ρ будем опускать там, где это не приводит к неясности.

Обозначая $k_2{}^2 = k_0{}^2\varepsilon_2 - \gamma^2$, получим систему дифференциальных уравнений внутри волновода:

$$\begin{cases} -k_2{}^2 u_1 + \gamma u_2{}' = f_1, \\ -\gamma \cdot \dfrac{1}{\rho}\left(\rho u_1\right)' - \dfrac{1}{\rho}\left(\rho u_2'\right)' - k_0^2 \varepsilon_2 u_2 = f_2, \end{cases} \tag{3}$$

где производная означает дифференцирование по ρ,

$$f_1 = k_0^2 a |\mathbf{u}|^2 u_1, \ f_2 = k_0^2 a |\mathbf{u}|^2 u_2,$$

$$|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2, \ \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T. \tag{4}$$

Вне волновода $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_0$. Тогда система дифференциальных уравнений вне волновода преобразуется к виду

$$\begin{cases} k_1{}^2 u_1 + \gamma u_2{}' = 0, \\ -\gamma \cdot \dfrac{1}{\rho}\left(\rho u_1\right)' - \dfrac{1}{\rho}\left(\rho u_2'\right)' - k_0^2 \varepsilon_1 u_2 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $k_1{}^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_1$.

С учетом условий на бесконечности получим решение системы (5):

$$u_2 \equiv E_z = C K_0(k_1 \rho), \ u_1 \equiv E_\rho = -\frac{\gamma}{k_1} C K_0'(k_1 \rho), \tag{6}$$

где $C = \text{const}$ – произвольная постоянная; $K_0(z) = \dfrac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iz)$ – функция Макдональда [5].

Условия сопряжения на границе раздела сред примут вид

$$[u_2] = 0, \ [\tilde{\varepsilon} u_1] = 0. \tag{7}$$

Сформулируем теперь краевую задачу на собственные значения (задача P). Требуется отыскать не равные одновременно тождественно нулю на полубесконечном интервале $\rho > 0$ функции $u_1(\rho), u_2(\rho)$ класса

$$u_1, u_2 \in C^2(0, R) \cap C^2(R, +\infty) \cap C[0, R] \cap C[R, +\infty)$$

и соответствующие собственные значения γ такие, что $u_1(\rho), u_2(\rho)$ удовлетворяют системе уравнений (3) на интервале $(0, R)$, уравнениям (6) на интервале $(R, +\infty)$, условиям сопряжения (7) и условиям экспоненциального убывания функций $u_1(\rho), u_2(\rho)$ на бесконечности при $\rho \to \infty$. Спектральным параметром задачи является вещественное число γ.

Функция Грина

Рассмотрим систему нелинейных уравнений (3). Из первого уравнения системы выражаем функцию u_1

$$u_1 = \frac{1}{k_2{}^2}(\gamma u_2' - f_1) \tag{8}$$

и подставляем ее во второе уравнение, которое и будем решать:

$$-\gamma\frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{1}{k_2{}^2}\left(\gamma u_2' - f_1\right)\right)' - \frac{1}{\rho}\left(\rho u_2'\right)' - k_0^2\varepsilon_2 u_2 = f_2 . \qquad (9)$$

Оно приводится к дифференциальному уравнению второго порядка

$$Lu_2 \equiv \left(\rho u_2'\right)' + k_2{}^2\rho u_2 = \frac{k_2{}^2}{k_0{}^2\varepsilon_2}\left(\frac{\gamma}{k_2{}^2}(\rho f_1)' - \rho f_2\right) \qquad (10)$$

с линейной частью $Lu_2 \equiv \left(\rho u_2'\right)' + k_2{}^2\rho u_2$.

Уравнение (10) может быть переписано в виде

$$\left(\rho u_2'\right)' + k_2{}^2\rho u_2 = F, \; 0 < \rho < R, \qquad (11)$$

где

$$F(\rho) = \frac{k_2{}^2}{k_0{}^2\varepsilon_2}\left(\frac{\gamma}{k_2{}^2}(\rho f_1)' - \rho f_2\right). \qquad (12)$$

Построим функцию Грина для краевой задачи:

$$\begin{cases} LG = -\delta(\rho - r), \\ G\big|_{\rho=0} - \text{ограничена}, \; G\big|_{\rho=R} = 0, \end{cases} \qquad (13)$$

где дифференциальный оператор определяется формулой

$$L = \rho\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + k_2{}^2\rho . \qquad (14)$$

Используя метод построения функции Грина, описанный в [6], получим

$$G(r,\rho) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2J_0(k_2R)}\left(J_0(k_2\rho)N_0(k_2r)J_0(k_2R) - J_0(k_2\rho)J_0(k_2r)N_0(k_2R)\right), \\ \qquad \rho \le r \le R, \\ \dfrac{\pi}{2J_0(k_2R)}\left(N_0(k_2\rho)J_0(k_2r)J_0(k_2R) - J_0(k_2\rho)J_0(k_2r)N_0(k_2R)\right), \\ \qquad r \le \rho \le R. \end{cases} \qquad (15)$$

Здесь $J_0(\rho)$ – функция Бесселя нулевого порядка, $N_0(\rho)$ – функция Неймана нулевого порядка. Функция Грина существует при таких значениях параметров, что $J_0(k_2R) \ne 0$.

Сведение краевой задачи к системе нелинейных интегральных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных уравнений (3). Используя вторую формулу Грина, получаем представление решения внутри волновода при $r \in (0, R)$:

$$u_2(r) = \int_0^R G(r,\rho)F(\rho)d\rho + Ru_2(R-0)\frac{\partial G}{\partial \rho}(r,R)\,; \tag{16}$$

$$u_1(r) = \frac{\gamma}{k_2^2}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^R G(r,\rho)F(\rho)d\rho - \frac{f_1(r)}{k_2^2} + \frac{\gamma R}{k_2^2}u_2(R-0)\frac{\partial^2 G}{\partial\rho\partial r}(r,R)\,. \tag{17}$$

Условия сопряжения на границе раздела сред примут вид

$$[u_2] = 0\,,\ \varepsilon_2 u_1\big|_{r=R-0} - \varepsilon_1 u_1\big|_{r=R+0} + au_1|\mathbf{u}|^2\Big|_{r=R-0} = 0\,. \tag{18}$$

Выберем условие нормировки в виде $C = 1$, тогда

$$u_2(R-0) = K_0(k_1 R)\,, \tag{19}$$

и получаем *дисперсионное соотношение*:

$$\Delta(\gamma) \equiv \varepsilon_2 u_1(R-0) + au_1(R-0)|\mathbf{u}(R-0)|^2 + \varepsilon_1\frac{\gamma}{k_1}K_0{}'(k_1 R) = 0 \tag{20}$$

при условии, что функции u_1, u_2 являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} u_1(r) = \dfrac{\gamma}{k_2^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\displaystyle\int_0^R G(r,\rho)F(\rho)d\rho - \dfrac{f_1(r)}{k_2^2} + \dfrac{\gamma R}{k_2^2}K_0(k_1 R)\dfrac{\partial^2 G}{\partial\rho\partial r}(r,R), \\ u_2(r) = \displaystyle\int_0^R G(r,\rho)F(\rho)d\rho + RK_0(k_1 R)\dfrac{\partial G}{\partial\rho}(r,R). \end{cases} \tag{21}$$

Преобразуем систему (21) к более удобному виду, не содержащему производных под интегралом от неизвестных функций. После преобразований получим окончательный вид системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} u_1(r) = -\dfrac{\gamma^2}{k_0^2\varepsilon_2 k_2^2}\displaystyle\int_0^R \dfrac{\partial^2 G}{\partial r\partial\rho}\rho f_1 d\rho - \dfrac{\gamma}{k_0^2\varepsilon_2}\displaystyle\int_0^R \dfrac{\partial G}{\partial r}\rho f_2 d\rho - \dfrac{1}{k_2^2}f_1(r) + h_1(r), \\ u_2(r) = -\dfrac{\gamma}{k_0^2\varepsilon_2}\displaystyle\int_0^R \dfrac{\partial G}{\partial\rho}\rho f_1 d\rho - \dfrac{k_2^2}{k_0^2\varepsilon_2}\displaystyle\int_0^R G\rho f_2 d\rho + h_2(r), \end{cases} \tag{22}$$

где

$$h_1(r) = -\frac{\gamma}{k_2}\frac{J_1(k_2 r)}{J_0(k_2 R)}K_0(k_1 R)\,,\ h_2(r) = \frac{J_0(k_2 r)}{J_0(k_2 R)}K_0(k_1 R)\,. \tag{23}$$

Для представления системы (22) в виде матричного оператора введем матрицу ядер:

$$\mathrm{K}(r,\rho) = \{K_{nm}(r,\rho)\}^2_{n,m=1} = -\rho\begin{bmatrix} q_{11}G_{\rho r} & q_{12}G_r \\ q_{21}G_\rho & q_{22}G \end{bmatrix}, \tag{24}$$

где индексы у функции G обозначают частные производные, и матрицу коэффициентов:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{bmatrix} (\gamma / k_2)^2 & \gamma \\ \gamma & k_2^2 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

а также матричный линейный интегральный оператор $\mathrm{K} = \{K_{nm}\}^2_{n,m=1}$ с операторами K_{nm}, связанный с системой (22):

$$\mathrm{K}\mathbf{g} = \int_0^R \mathrm{K}(r,\rho)\mathbf{g}(\rho)d\rho, \tag{26}$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2)^T$.

Тогда система интегральных уравнений может быть записана в операторном виде:

$$\mathbf{u} = a\mathrm{K}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) - a\,\mathrm{J}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}, \tag{27}$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$, а оператор J определяется формулой

$$\mathrm{J} = \frac{k_0^2}{k_2^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Отметим, что операторы K, J являются линейными.

Введем также линейные операторы $\mathrm{N} := a(\mathrm{K} - \mathrm{J})$ и $\mathrm{N}_0 := \mathrm{K} - \mathrm{J}$.

Будем рассматривать уравнение (27) в пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}[0,R] = \mathrm{C}[0,R] \times \mathrm{C}[0,R]$ с нормой $\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{C}} = \|u_1\|^2_C + \|u_2\|^2_C$, где $\|u\|_C = \max\limits_{x \in [0,R]} u(x)$.

Исследование ядер интегральных операторов

Для изучения интегрального оператора (26) рассмотрим свойства ядер соответствующих интегральных операторов. Пусть $\Pi = (0,R) \times (0,R)$. Используя свойства функций Бесселя и Неймана, а также вычисляя пределы функции Грина и ее производных при $r \to 0, \rho \to 0$, получим справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Функции $k_{11}(r,\rho)$ и $k_{22}(r,\rho)$ непрерывны в квадрате $\overline{\Pi} = [0,R] \times [0,R]$. Функция $k_{12}(r,\rho)$ ограничена в $\overline{\Pi}$ и непрерывна в $\overline{T}^+$ и в $\overline{T}^- \setminus \{0\}$, функция $k_{21}(r,\rho)$ ограничена в $\overline{\Pi}$ и непрерывна в $\overline{T}^+$ и в $\overline{T}^-$, где

$$\overline{T}^+ = \{(r,\rho) \in \Pi, \rho \geq r\}, \overline{T}^- = \{(r,\rho) \in \Pi, \rho \leq r\}.$$

Под непрерывностью функции $f(r,\rho)$ в $\overline{T}^+$ (в $\overline{T}^-$) понимается, что для любой точки $(r_0,\rho_0) \in \overline{T}^+$ ($(r_0,\rho_0) \in \overline{T}^-$)

$$\lim_{\substack{r\to r_0,\rho\to\rho_0\\ (r,\rho)\in\overline{T}^+,(r_0,\rho_0)\in\overline{T}^+}} f(r,\rho)=f(r_0,\rho_0)\ \ (\lim_{\substack{r\to r_0,\rho\to\rho_0\\ (r,\rho)\in\overline{T}^-,(r_0,\rho_0)\in\overline{T}^-}} f(r,\rho)=f(r_0,\rho_0)\,).$$

Под непрерывностью функции $f(r,\rho)$ в $\overline{T}^-\setminus\{0\}$ понимается, что функция непрерывна во всех точках $\overline{T}^-$ (в вышеуказанном смысле), за исключением точки $r=0,\rho=0$.

Перечисленные свойства ядер позволяют утверждать ограниченность оператора $\mathrm{K}:\mathbf{C}[0,R]\to\mathbf{C}[0,R]$. Очевидно, что оператор $\mathrm{J}:\mathbf{C}[0,R]\to\mathbf{C}[0,R]$ также ограничен. Соответствующее утверждение с оценками норм операторов будет дано далее.

Оценки норм интегральных операторов

Оценим нормы интегральных операторов в $\mathbf{C}[0,R]=\mathrm{C}[0,R]\times\mathrm{C}[0,R]$, которые потребуются в дальнейшем. Пусть матричный линейный интегральный оператор $\mathrm{K}=\{K_{nm}\}_{m,n=1}^{2}$ задан формулой

$$\mathrm{K}\boldsymbol{\varphi}=\int_0^R \mathrm{K}(x,y)\boldsymbol{\varphi}(y)dy \qquad (29)$$

с ограниченными ядрами $K_{nm}(x,y)$, обладающими свойствами, сформулированными в утверждении 1.

Тогда верно

Утверждение 2. Пусть интегральный оператор $\mathrm{K}:\mathbf{C}[0,R]\to\mathbf{C}[0,R]$ задан формулой (29) с ограниченными в квадрате $[0,R]\times[0,R]$ ядрами $K_{nm}(x,y)$, заданными формулами (24) и (25). Тогда он ограничен и верна оценка для его нормы

$$\|\mathrm{K}\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{C}}\le M,$$

где $M^2=2\left(\max\limits_{j=1,2}\|K_{1j}\|^2_{C\to C}+\max\limits_{j=1,2}\|K_{2j}\|^2_{C\to C}\right)$.

Итерационный метод решения системы интегральных уравнений

Приближенные решения $\mathbf{u}^n(r)=(u_1{}^n(r),u_2{}^n(r))^T$, $r\in[0,R]$, системы интегральных уравнений (22) могут быть определены с помощью итерационного процесса метода сжимающих отображений

$$\mathbf{u}^{n+1}=a\mathrm{K}(\left|\mathbf{u}^n\right|^2\mathbf{u}^n)-a\,\mathrm{J}(\left|\mathbf{u}^n\right|^2\mathbf{u}^n)+\mathbf{h}\,. \qquad (30)$$

Докажем, что последовательность $u_1{}^n(r),u_2{}^n(r)$ равномерно сходится к решению системы уравнений (22) вследствие того, что правая часть системы уравнений (22) определяет сжимающий оператор. Ниже при записи норм операторов не будем писать индекс, поскольку из контекста ясно о каком – векторном или скалярном – пространстве идет речь.

Теорема 1. *Пусть* $B_{r_0} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \le r_0\}$ *– шар радиуса* r_0 *с центром в нуле и выполнены два условия*:

$$q := 3ar_0^2 \|\mathrm{K} - \mathrm{J}\| < 1 \tag{31}$$

и

$$ar_0^3 \|\mathrm{K} - \mathrm{J}\| + \|\mathbf{h}\| \le r_0 . \tag{32}$$

Тогда существует и единственно решение $\mathbf{u} \in B_{r_0}$ *уравнения* (27), *и последовательность приближенных решений* $\mathbf{u}^n \in B_{r_0}$ *уравнения* (27), *определяемых посредством итерационного алгоритма* (30), *сходится в норме пространства* $\mathbf{C}[0, R]$ *к* (*единственному*) *точному решению* $\mathbf{u} \in B_{r_0}$ *уравнения* (27) *при любом начальном приближении* $\mathbf{u}^0 \in B_{r_0}$ *со скоростью геометрической прогрессии с показателем* q .

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнение $\mathbf{u} = \mathrm{A}(\mathbf{u})$ с нелинейным оператором

$$\mathrm{A}(\mathbf{u}) \equiv a\mathrm{K}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) - a\,\mathrm{J}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h} \tag{33}$$

в пространстве $\mathbf{C}[0, R]$. Пусть $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B_{r_0}$; $\|\mathbf{u}\| \le r_0, \|\mathbf{v}\| \le r_0$, тогда

$$\|\mathrm{A}(\mathbf{u}) - \mathrm{A}(\mathbf{v})\| = a\left\|\mathrm{K}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) - \mathrm{J}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v})\right\| \le$$

$$\le 3a\|\mathrm{K} - \mathrm{J}\| r_0^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| . \tag{34}$$

Так как

$$\|\mathrm{A}(\mathbf{u})\| = \left\|a\mathrm{K}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) - a\,\mathrm{J}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}\right\| \le ar_0^3 \|\mathrm{K} - \mathrm{J}\| + \|\mathbf{h}\| ,$$

то при выполнении условия (32) оператор A отображает шар B_{r_0} в себя. Из оценок (31) и (36) следует, что оператор A является сжимающим в шаре B_{r_0} . Тогда все утверждения теоремы следуют из принципа сжимающих отображений [7]. Теорема доказана.

Разберем условие (32) более подробно. Рассмотрим уравнение

$$r_0 - \|\mathrm{N}\| r_0{}^3 = \|\mathbf{h}\| , \tag{35}$$

где норма оператора $\|\mathrm{N}\| = a\|\mathrm{K} - \mathrm{J}\| > 0$.

При условии

$$0 \le \|\mathbf{h}\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\,\|\mathrm{N}\|}}$$

уравнение (35) имеет два неотрицательных корня: r_* и r^*, $r_* \le r^*$,

$$r_* = -2\sqrt{\frac{1}{3\,\|\mathrm{N}\|}}\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\|\mathbf{h}\|\sqrt{\|\mathrm{N}\|}\right)}{3} - \frac{2\pi}{3}\right); \tag{36}$$

$$r^* = -2\sqrt{\frac{1}{3\|\mathrm{N}\|}}\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\|\mathbf{h}\|\sqrt{\|\mathrm{N}\|}\right)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right). \tag{37}$$

Если $\|\mathbf{h}\| = 0,$ то $r_* = 0$ и $r^* = \dfrac{1}{\sqrt{\|\mathrm{N}\|}}$.

При $\|\mathbf{h}\| = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt{3\,\|\mathrm{N}\|}}$ имеем $r_* = r^* = \dfrac{1}{\sqrt{3\,\|\mathrm{N}\|}}$.

Лемма 1. *Если выполняется неравенство*

$$0 \le \|\mathbf{h}\| < \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3\,\|\mathrm{N}\|}}, \tag{38}$$

то уравнение (35) *имеет два неотрицательных решения:* r_* *и* r^*, $r_* < r^*$.

Теперь докажем, что если выполняется условие (38), то уравнение (27) имеет единственное решение в шаре $B_{r_*} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \le r_*\}$.

Теорема 2. *Если* $a \le A^2$, *где*

$$A = \frac{2}{3}\frac{1}{\|\mathbf{h}\|\sqrt{3\|\mathrm{N}_0\|}} \tag{39}$$

и

$$\|\mathrm{N}_0\| := \|\mathrm{K} - \mathrm{J}\| (> 0),$$

то уравнение (27) *имеет единственное решение в шаре* $B_{r_*} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \le r_*\}$, *являющееся непрерывной функцией*:

$$\mathbf{u} \in \mathbf{C}[0,\ R],\quad \|\mathbf{u}\| \le r_*.$$

Доказательство. Если $\mathbf{u} \in B_{r_*}$, то

$$\|\mathrm{A}(\mathbf{u})\| = \left\| a\mathrm{K}(|\mathbf{u}|^2\,\mathbf{u}) - a\,\mathrm{J}(|\mathbf{u}|^2\,\mathbf{u}) + \mathbf{h}\right\| \le a r_*^3\,\|\mathrm{K} - \mathrm{J}\| + \|\mathbf{h}\| = r_*.$$

Если $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B_{r_*}$, то

$$\|\mathrm{A}(\mathbf{u}) - \mathrm{A}(\mathbf{v})\| = a\left\|\mathrm{K}(|\mathbf{u}|^2\,\mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2\,\mathbf{v}) - \mathrm{J}(|\mathbf{u}|^2\,\mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2\,\mathbf{v})\right\| \le 3a\|\mathrm{K} - \mathrm{J}\| r_*^2\,\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Так как $a \le A^2$, то $\mathbf{h}$ удовлетворяет условию (38). Поэтому $q = 3ar_*^2 \|\mathrm{K} - \mathrm{J}\| = 3\|N\| r_*^2 < 1$. Следовательно, выполняются оба неравенства (31) и (32).

Таким образом, A отображает B_{r_*} в себя и является сжимающим оператором на B_{r_*}. Поэтому уравнение (27) имеет единственное решение в B_{r_*}. Теорема доказана.

Отметим, что $A > 0$ и не зависит от a.

Теорема о непрерывной зависимости решения от спектрального параметра

В дальнейшем нам понадобится утверждение о зависимости решений интегрального уравнения (27) от параметра. Перепишем уравнение (27) в форме

$$\mathbf{u} = \mathrm{N}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}, \tag{40}$$

где оператор

$$\mathrm{N} := a(\mathrm{K} - \mathrm{J}) \tag{41}$$

с матричными ядрами

$$\mathrm{N}(r,\rho) := a(\mathrm{K}(r,\rho) - \mathrm{J}(r,\rho)) \tag{42}$$

определен формулами (22)–(28).

Теорема 3. Пусть ядра матричного оператора $\mathrm{N} = a(\mathrm{K} - \mathrm{J})$ и правая часть $\mathbf{h}$ уравнения (27) непрерывно зависят от параметра $\gamma \in \Gamma_0$, $\mathrm{N}(\gamma) \subset \mathbf{C}(\Gamma_0)$, $\mathbf{h}(\gamma) \subset \mathbf{C}(\Gamma_0)$ на некотором отрезке Γ_0 вещественной числовой оси. Пусть также

$$\|\mathbf{h}(\gamma)\| \le \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|\mathrm{N}(\gamma)\|}}. \tag{43}$$

Тогда решения $\mathbf{u}(\gamma)$ уравнения (27) при $\gamma \in \Gamma_0$ существуют, единственны и непрерывно зависят от параметра γ, $\mathbf{u}(\gamma) \subset \mathbf{C}(\Gamma_0)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (27). Существование и единственность решений $\mathbf{u}(\gamma)$ при условиях теоремы следует из теоремы 2. Докажем непрерывную зависимость этих решений от спектрального параметра γ.

Нетрудно видеть из формулы (36), что $r_*(\gamma)$ непрерывно зависит от γ на отрезке Γ_0. Пусть $r_{**} = \max_{\gamma \in \Gamma_0} r_*(\gamma)$ и максимум достигается в точке γ_*, $r_*(\gamma_*) = r_{**}$. Выберем $\gamma + \Delta\gamma \in \Gamma_0$. Тогда $r_*(\gamma) \le r_{**}$ и $r_*(\gamma + \Delta\gamma) \le r_{**}$.

Далее, пусть $Q_0 = \max_{\gamma \in \Gamma_0}(3r_*^2(\gamma)\|\mathrm{N}(\gamma)\|)$ и максимум достигается в точке $\hat{\gamma} \in \Gamma_0$, $Q_0 = 3r_*^2(\hat{\gamma})\left\|\mathrm{N}(\hat{\gamma})\right\|$. Тогда $Q_0 < 1$ в силу условия (43) теоремы.

Предположим сначала, что

$$\|\mathbf{u}(\gamma)\| \ge \|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma)\|. \tag{44}$$

Тогда имеют место следующие оценки:

$$\left|\mathbf{u}(r,\gamma+\Delta\gamma)-\mathbf{u}(r,\gamma)\right| = \left|\int_0^R \mathrm{N}(\gamma+\Delta\gamma,r,\rho)\left|\mathbf{u}(\rho,\gamma+\Delta\gamma)\right|^2 \mathbf{u}(\rho,\gamma+\Delta\gamma)d\rho - \right.$$

$$\left. - \int_0^R \mathrm{N}(\gamma,r,\rho)\left|\mathbf{u}(\rho,\gamma)\right|^2 \mathbf{u}(\rho,\gamma)d\rho + \mathbf{h}(r,\gamma+\Delta\gamma) - \mathbf{h}(r,\gamma)\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^R (\mathrm{N}(\gamma+\Delta\gamma,r,\rho)-\mathrm{N}(\gamma,r,\rho))\left|\mathbf{u}(\rho,\gamma+\Delta\gamma)\right|^2 \mathbf{u}(\rho,\gamma+\Delta\gamma)d\rho + \right.$$

$$\left. + \int_0^R \mathrm{N}(\gamma,r,\rho)(\left|\mathbf{u}(\rho,\gamma+\Delta\gamma)\right|^2 \mathbf{u}(\rho,\gamma+\Delta\gamma) - \left|\mathbf{u}(\rho,\gamma)\right|^2 \mathbf{u}(\rho,\gamma))d\rho\right| + \left|\mathbf{h}(r,\gamma+\Delta\gamma)-\mathbf{h}(r,\gamma)\right|,$$

поэтому (см. доказательство теоремы 2)

$$\left\|\mathbf{u}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathbf{u}(\gamma)\right\| \le r_*^3(\gamma)\left\|\mathrm{N}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathrm{N}(\gamma)\right\| +$$

$$+\left\|\mathbf{u}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathbf{u}(\gamma)\right\| 3r_*^2(\gamma)\left\|\mathrm{N}(\gamma)\right\| + \left\|\mathbf{h}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathbf{h}(\gamma)\right\|.$$

Здесь было использовано условие (44).

Отсюда получаем, что

$$\left\|\mathbf{u}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathbf{u}(\gamma)\right\| \le \frac{1}{1-3r_*^2(\gamma)\left\|\mathrm{N}(\gamma)\right\|}(r_*^3(\gamma)\left\|\mathrm{N}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathrm{N}(\gamma)\right\| + \left\|\mathbf{h}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathbf{h}(\gamma)\right\|)$$

и

$$\left\|\mathbf{u}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathbf{u}(\gamma)\right\| \le \frac{1}{1-Q_0}(r_{**}^3\left\|\mathrm{N}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathrm{N}(\gamma)\right\| + \left\|\mathbf{h}(\gamma+\Delta\gamma)-\mathbf{h}(\gamma)\right\|), \quad (45)$$

где Q_0 и r_{**} не зависят от γ.

Пусть теперь $\left\|\mathbf{u}(\gamma)\right\| \le \left\|\mathbf{u}(\gamma+\Delta\gamma)\right\|$. Тогда все предыдущие оценки остаются в силе, если заменить аргументы γ на $\gamma+\Delta\gamma$, а $\gamma+\Delta\gamma$ на γ. Таким образом, оценка (45) также остается в силе, откуда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теоремы о существовании и единственности решений дисперсионного уравнения и задачи на собственные значения

В этом параграфе будет доказано существование решений дисперсионного уравнения (20). Соберем все слагаемые в (20), не содержащие параметр нелинейности a, в левой части уравнения, а остальные слагаемые – в правой части, получим

$$\varepsilon_2 \frac{\gamma}{k_2}\frac{J_1(k_2R)}{J_0(k_2R)}K_0(k_1R) - \varepsilon_1\frac{\gamma}{k_1}K_0'(k_1R) = a\tilde{F}(\gamma), \quad (46)$$

где

$$\tilde{F}(\gamma)=-\gamma^2\frac{\pi}{2}\int\limits_0^R\left(J_1(k_2\rho)N_1(k_2R)-\frac{1}{J_0(k_2R)}J_1(k_2\rho)J_1(k_2R)N_0(k_2R)\right)\rho|\mathbf{u}|^2u_1d\rho-$$

$$-\gamma k_2\frac{\pi}{2}\int\limits_0^R J_0(k_2\rho)\left(\frac{1}{J_0(k_2R)}J_1(k_2R)N_0(k_2R)-N_1(k_2R)\right)\rho|\mathbf{u}|^2u_2d\rho-$$

$$-\frac{\varepsilon_2}{k_2^2}k_0^2\,|\mathbf{u}(R-0)|^2u_1(R-0)+|\mathbf{u}(R-0)|^2u_1(R-0)\,. \qquad (47)$$

Умножим на $J_0(k_2R)k_1k_2/\gamma$ левую и правую части уравнения, получим

$$\varepsilon_2k_1J_1(k_1R)K_0(k_1R)+\varepsilon_1k_2J_0(k_2R)K_1(k_1R)=aF(\gamma)\,, \qquad (48)$$

где

$$F(\gamma)=\frac{J_0(k_2R)k_1k_2\tilde{F}(\gamma)}{\gamma}\,. \qquad (49)$$

Отметим, что функция (49) неявно зависит от параметра нелинейности a. Однако эту функцию можно будет оценить константой (в некотором шаре), не зависящей от a, что позволит сделать правую часть (48) достаточно малой, выбрав достаточно малое a.

Рассмотрим левую часть уравнения (48). Она соответствует дисперсионному уравнению для линейной среды внутри волновода, т.е. при $a=0$ [3, 4]:

$$g(\gamma)\equiv\varepsilon_2k_1J_1(k_1R)K_0(k_1R)+\varepsilon_1k_2J_0(k_2R)K_1(k_1R)=0\,. \qquad (50)$$

Обозначим $\lambda_{1m}:=k_0^2\varepsilon_2-\dfrac{j_{1m}^2}{R^2}$, $\lambda_{2m}:=k_0^2\varepsilon_2-\dfrac{j_{0m}^2}{R^2}$, где j_{0m} – m-й положительный корень уравнения $J_0(x)=0$, а j_{1m} – m-й положительный корень уравнения $J_1(x)=0$; $m=1,2,...$ Тогда

$$\operatorname{sign}g(\sqrt{\lambda_{1m}})=(-1)^m\,,\ \operatorname{sign}g(\sqrt{\lambda_{2m}})=(-1)^{m+1}\,. \qquad (51)$$

Таким образом, на интервале $(\sqrt{\lambda_{1i}},\sqrt{\lambda_{2i}})$ есть по крайней мере один корень γ_{0i} уравнения $g(\gamma)=0$, если $k_0^2\varepsilon_1<\lambda_{1i},\lambda_{2i}<k_0^2\varepsilon_2$, т.е. $g(\gamma_{0i})=0$ при $\gamma_{0i}\in(\sqrt{\lambda_{1i}},\sqrt{\lambda_{2i}})$.

Точки $\sqrt{\lambda_{2i}}$ являются полюсами функции Грина (15). Поэтому выберем такие (достаточно малые) числа $\delta_i>0$, чтобы выполнялись условия:

$$\operatorname{sign}g(\sqrt{\lambda_{2i}}-\delta_i)=(-1)^{i+1}\,,\ \sqrt{\lambda_{2i}}-\delta_i>\gamma_{0i}\,. \qquad (52)$$

Образуем отрезки $\Gamma_i:=[\sqrt{\lambda_{1i}},\sqrt{\lambda_{2i}}-\delta_i]$. При условиях (52) функция $g(\gamma)$ имеет разные знаки на разных концах Γ_i и обращается в ноль в точке

$\gamma_{0i} \in (\sqrt{\lambda_{1i}}, \sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i)$. Пусть $\lambda_{1m} > k_0^2 \varepsilon_1$ для некоторого $m \geq 1$. Обозначим $\Gamma := \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i$. Тогда верна

Теорема 4. *Пусть числа* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a$ *удовлетворяют условиям* $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ *и* $0 < a \leq a_0$, *где*

$$a_0 = \min\left(\min_{\gamma\in\Gamma} A^2(\gamma), \frac{\min\limits_{1\leq l\leq 2, 1\leq i\leq m} \left|g(\sqrt{\lambda_{li}})\right|}{0{,}3R^2 \left(\max\limits_{\gamma\in\Gamma} r_*(\gamma) \right)^3} \right), \quad A(\gamma) = \frac{2}{3} \frac{1}{\|\mathbf{h}(\gamma)\| \sqrt{3\|\mathrm{N}_0(\gamma)\|}}, \quad (53)$$

и выполняется условие

$$\lambda_{1m} > k_0^2 \varepsilon_1 \quad (54)$$

для определенного $m \geq 1$. *Тогда существует по крайней мере* m *значений* $\gamma_i, i = 1,...,m$, $\sqrt{\lambda_{1i}} < \gamma_i < \sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i$ *таких, что задача* P *имеет ненулевое решение.*

Доказательство. В силу выбора чисел $\delta_i > 0$ ($i \geq 1$) (см. условия (52)), функция Грина существует для всех $\gamma \in \Gamma$. Из ядер и правых частей матричного интегрального оператора следует, что $A = A(\gamma)$ – непрерывная функция на отрезке Γ. Пусть $A_1 = \min\limits_{\gamma\in\Gamma} A(\gamma)$ и выберем $a < A_1^2$. В соответствии с теоремой 2 существует единственное решение $u = u(\gamma)$ системы уравнений (22) для каждого $\gamma \in \Gamma$. Это решение является непрерывной функцией, причем $\|u\| \leq r_* = r_*(\gamma)$. Положим $r_{00} = \max\limits_{\gamma\in\Gamma} r_*(\gamma)$. Оценивая функцию (49), получаем $\left|F(\gamma, R; u)\right| \leq C r_{00}^3$.

Функция $g(\gamma)$ непрерывна, и уравнение $g(\gamma) = 0$ имеет корень γ_{0i} внутри отрезка Γ_i, $\sqrt{\lambda_{1i}} < \gamma_{0i} < \sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i$. Обозначим $M_1 = \min\limits_{1\leq i\leq m} |g(\sqrt{\lambda_{1i}})|$, $M_2 = \min\limits_{1\leq i\leq m} |g(\sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i)|$. Тогда число $\tilde{M} = \min\{M_1, M_2\}$ положительно ($\tilde{M} > 0$) и не зависит от параметра a.

Если $a \leq \dfrac{\tilde{M}}{C r_{00}^3}$, то

$$\left(g(\sqrt{\lambda_{1i}}) - aF(\sqrt{\lambda_{1i}})\right)\left(g(\sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i) - aF(\sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i)\right) < 0.$$

Так как $g(\gamma) - aF(\gamma, R; u)$ также непрерывная функция, то уравнение $g(\gamma) - aF(\gamma, R; u) = 0$ имеет корень γ_i внутри Γ_i, $\sqrt{\lambda_{1i}} < \gamma_i < \sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i$. Мы можем выбрать

$$a_0 = \min\left\{ A_1^2, \frac{\tilde{M}}{Cr_{00}^3} \right\}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 4 следует, что при условиях, сформулированных выше, существуют осесимметричные распространяющиеся ТМ-поляризованные волны без затухания в цилиндрических диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных немагнитной, изотропной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра.

Итерационный метод решения системы интегральных уравнений и оценка скорости сходимости

Известна оценка для скорости сходимости итерационного алгоритма (30) [7]. В частности, если выбрать в качестве начального приближения $\mathbf{u}^0(r) = (0,0)^T$, то получаем следующую оценку скорости сходимости итерационного процесса.

Утверждение 3. Пусть $\mathbf{u}^0 = (0,0)^T$. Последовательность приближенных решений $\mathbf{u}^n = (u_1{}^n, u_2{}^n)^T$ системы уравнений (22), определяемых посредством итерационного алгоритма (30), существует и сходится в норме пространства $\mathbf{C}[0,R]$ к (единственному) точному решению $\mathbf{u}$ системы уравнений (22) и верна оценка скорости сходимости:

$$\left\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^n \right\| \le \frac{q^n}{1-q} \left\| \mathbf{h} \right\|, n \to \infty, \tag{55}$$

где $q := 3ar_*^2 \left\| \mathrm{K} - \mathrm{J} \right\| < 1$ – коэффициент сжатия отображения.

Теорема о сходимости итерационного метода

Теперь сформулируем итерационный метод нахождения приближенных собственных значений краевой задачи P и докажем теоремы о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным.

Теорема 5. *Пусть существуют* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a$, *удовлетворяющие условиям* $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0, 0 < a \le a_0$, *где* a_0 *определяется соотношением* (53), *и выполняется условие* (54) *для определенного* $m \ge 1$. *Тогда для каждого* $n \ge 0$ *существует по крайней мере* m *значений* $\gamma_i^{(n)}$, $i = 1,...,m$, *удовлетворяющих неравенствам* $\sqrt{\lambda_{1i}} < \gamma_i^{(n)} < \sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i$ *и являющихся корнями уравнения*

$$k_1^{(n)} \varepsilon_2 K_1(k_1^{(n)} R) J_0(k_2^{(n)} R) + k_2^{(n)} \varepsilon_1 K_0(k_1^{(n)} R) J_1(k_2^{(n)} R) = aF(\gamma^{(n)}), \tag{56}$$

где $k_1^{(n)} = \sqrt{(\gamma^{(n)})^2 - k_0^2 \varepsilon_1}, k_2^{(n)} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 - (\gamma^{(n)})^2}$, *а* $\mathbf{u}^n$ *определяется соотношением* (30).

Доказательство. Для каждого $n \ge 0$ функции $\mathbf{u}^n$ непрерывны согласно соотношению (30). Таким образом, для доказательства достаточно повторить доказательство теоремы 4, если заменить $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}^n$ и проверить условия $\left\|\mathbf{u}^n\right\| \le r_* = r_*(\gamma)$. Это неравенство выполняется, потому что все итерации $\mathbf{u}^n$ лежат внутри шара B_{r_*} [6], если начальное приближение лежит в шаре B_{r_*} (что имеет место).

Следующая теорема утверждает сходимость приближенных собственных значений к точным.

Теорема 6. *Пусть существуют* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a$, *удовлетворяющие условиям* $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0, 0 < a \le a_0$, *где* a_0 *определяется соотношением* (53), *и выполняется условие* (54) *для определенного* $m \ge 1$. *Пусть* γ_i *и* $\gamma_i^{(n)}$ *– соответственно точное и приближенное собственные значения проблемы* P *на отрезке* Γ_i (γ_i *и* $\gamma_i^{(n)}$ *– корни точного и приближенного дисперсионных уравнений соответственно* $i \le m, m \ge 1$). *Тогда* $\left|\gamma_i^{(n)} - \gamma_i\right| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\Phi(\gamma) = g(\gamma) - aF(\gamma; \mathbf{u}), \Phi_n(\gamma) = g(\gamma) - aF(\gamma; \mathbf{u}^n). \tag{57}$$

Тогда, используя формулы (47)–(49), находим, что

$$\left|\Phi(\gamma) - \Phi_n(\gamma)\right| = a\left|F(\gamma; \mathbf{u}) - F(\gamma; \mathbf{u}^n)\right| \le a\tilde{C}\left\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^n\right\| \le a\tilde{C}\frac{q^n}{1-q}\left\|\mathbf{h}\right\|,$$

где константа $\tilde{C}$ не зависит от n, а все другие величины определены выше.

Имеем

$$\max_{\gamma \in \Gamma}\left|\Phi(\gamma) - \Phi_n(\gamma)\right| \le a\frac{Q^n}{1-Q}C_*, \tag{58}$$

где $C_* = \max\limits_{\gamma \in \Gamma}\{\left\|\mathbf{h}(\gamma)\right\|\tilde{C}(\gamma)\}$, $Q = \max\limits_{\gamma \in \Gamma}(3r_*^2(\gamma)\left\|\mathrm{N}(\gamma)\right\|)$ и $Q < 1$.

При выполнении условий теорем 4 и 5 существуют решения γ_i и $\gamma_i^{(n)}$ точного и приближенного дисперсионного уравнений $\Phi(\gamma) = 0$ и $\Phi_n(\gamma) = 0$ ($n \ge 0$). Также при доказательстве теорем 4 и 5 было установлено, что непрерывные функции $\Phi(\gamma), \Phi_n(\gamma)$ меняют свой знак на концах отрезка Γ_i. Тогда доказательство теоремы следует из оценки (58).

Список литературы

1. **Eleonskii, V. M.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / V. M. Eleonskii, L. G. Oganes'yants, V. P. Silin // Soviet physics JETP. – 1972. – V. 35. – № 1. – P 44–47.
2. **Ахмедиев, Н. Н.** Солитоны / Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
3. **Snyder, A.** Optical Waveguide Theory / A. Snyder, J. Love // Chapman and Hall. – London, 1983.
4. **Левин, Л.** Теория волноводов. Методы решения волноводных задач / Л. Левин. – М. : Радио и связь, 1981.

5. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – 4-е изд. – М. : Физматгиз, 1963.
6. **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1981.

Хорошева Эльвира Александровна
ассистент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Choresheva Elvira Alexandrovna
Assistant, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

Смирнов Юрий Геннадьевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yury Gennadyevich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

---

УДК 517.9

Смирнов, Ю. Г.

О разрешимости нелинейной краевой задачи на собственные значения для распространяющихся ТМ-волн в круглом нелинейном волноводе / Ю. Г. Смирнов, Э. А. Хорошева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 55–70.